צבירים מסועפים: תכונות צבירי DLA כתלות בריכוז התמיסה

שקד סוקניק, ניר כהן

16 ביולי 2026

תקציר

מודל ה־DLA (Diffusion-Limited Aggregation) מתאר היווצרות מבנים פרקטליים מסועפים מחלקיקים המבצעים תנועה בראונית ונצמדים באופן בלתי־הפיך לצביר גדל. בניסוי זה נחקר כיצד ריכוז תמיסת נחושת גופרתית משפיע על תכונות המבנה של צבירים הגדלים בתהליך אלקטרודפוזיציה. המערכת כללה אנודה וקתודה בצלחת פטרי עם התמיסה שצולמה במבט עילי, תחת מתח קבוע של $12V$ וריכוזים שנעו בין $0.02\% - 0.56\%$. מתוך צילומי הוידאו חולץ רדיוס המעגל החוסם את הצביר $R(t)$, קצב הגדילה הממוצע $\left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle$, צפיפות הצביר ϕ, והממד הפרקטלי D שחושב בשיטת Box-Counting. מניתוח התוצאות עולה כי קצב הגדילה עולה עם ריכוז התמיסה, וצפיפות הצביר מגיעה לרוויה כבר מעל הריכוז הנמוך ביותר. בריכוז הנמוך ביותר - התנאים הקרובים ביותר ל־DLA אידיאלי - התקבל ממד פרקטלי של 1.69 ± 0.05, בהתאמה לערך התיאורטי $D \approx 1.71$ של DLA דו־ממדי; בריכוזים גבוהים יותר הממד עולה ומתייצב סביב 1.9, בעקביות עם מעבר מהתחום מוגבל־הדיפוזיה למבנה קומפקטי שממדו מתקרב לממד המישור. מגבלות הרזולוציה והיציבות המכנית של מערכת הצילום מציבות חסם על דיוק הממד הנמדד, אך אינן משנות את התמונה האיכותנית של תלות מבנה הצביר בריכוז.

1 מבוא ורקע תיאורטי

תנועה בראונית היא הליכה אקראית: חלקיק הנע בצעדים קטנים, בלתי־תלויים ואקראיים, מתפשט כך שממוצע ריבוע ההעתק שלו (MSD) גדל ליניארית בזמן

$$\left\langle \Delta r^2 \right\rangle = 2d\mathcal{D}t \tag{1}$$

כאשר d ממד המרחב ו־$\mathcal{D}$ מקדם הדיפוזיה. יוני הנחושת בתמיסה נעים באותו אופן, ותנועה זו היא המנגנון שמאחורי הגדילה הפרקטלית שנחקרה בניסוי.

מודל ה־DLA (Diffusion-Limited Aggregation) מתאר חלקיקים כאלה, המשוחררים הרחק מגרעין קבוע (seed), נעים בדיפוזיה, ועם המגע הראשון בצביר נצמדים אליו באופן בלתי־הפיך. חלקיק המגיע מרחוק צפוי לפגוע בקצה בולט בטרם יחדור אל החלל שבין הענפים - הקצוות ממסכים (screening) את פנים המבנה: כל בליטה גדלה מהר מסביבתה ומעצימה את עצמה, ומתקבל מבנה מסועף ודומה־לעצמו (self-similar). באלקטרודפוזיציה של נחושת מתקיים אותו מנגנון: יון ה־Cu^{2+} הוא ההולך האקראי, קצה חוט הקתודה הוא הגרעין, והתגובה

$$Cu^{2+} + 2e^- \rightarrow Cu^0 \tag{2}$$

על פני המשקע היא צעד ההיצמדות הבלתי־הפיך.

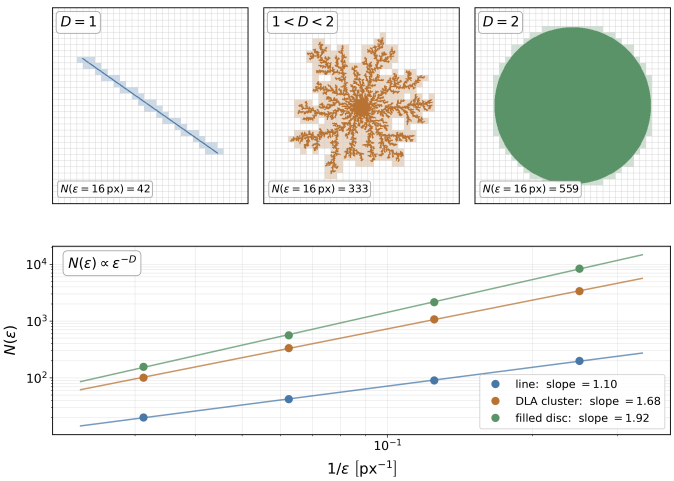
המבנה המסועף מאופיין בממד הפרקטלי D, המוגדר מן האופן שבו המסה M גדלה עם קנה המידה R:

$$M \propto R^D \tag{3}$$

עבור $D = 1$ מתקבל קו, עבור $D = 2$ מבנה הממלא את המישור, ובתחום $1 < D < 2$ מבנה מסועף המשאיר את רוב המישור ריק; ל־DLA דו־ממדי הערך התיאורטי הוא $D \approx 1.71$. את D מדדנו בשיטת ספירת הקופסאות (box-counting): מכסים את התמונה בתיבות בעלות צלע ε, סופרים את מספר התיבות $N(\varepsilon)$ המכילות חלק מהמשקע, ופרקטל מקיים

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \tag{4}$$

כך ש־D מחולץ כשיפוע בגרף לוג־לוג (איור 1). הממד המתקבל הוא "אפקטיבי" בלבד: חוק החזקה מתקיים בחלון קני־מידה סופי - בין רוחב ענף בודד לגודל הצביר - וענפים עבים או חלון צר מטים אותו כלפי מעלה.

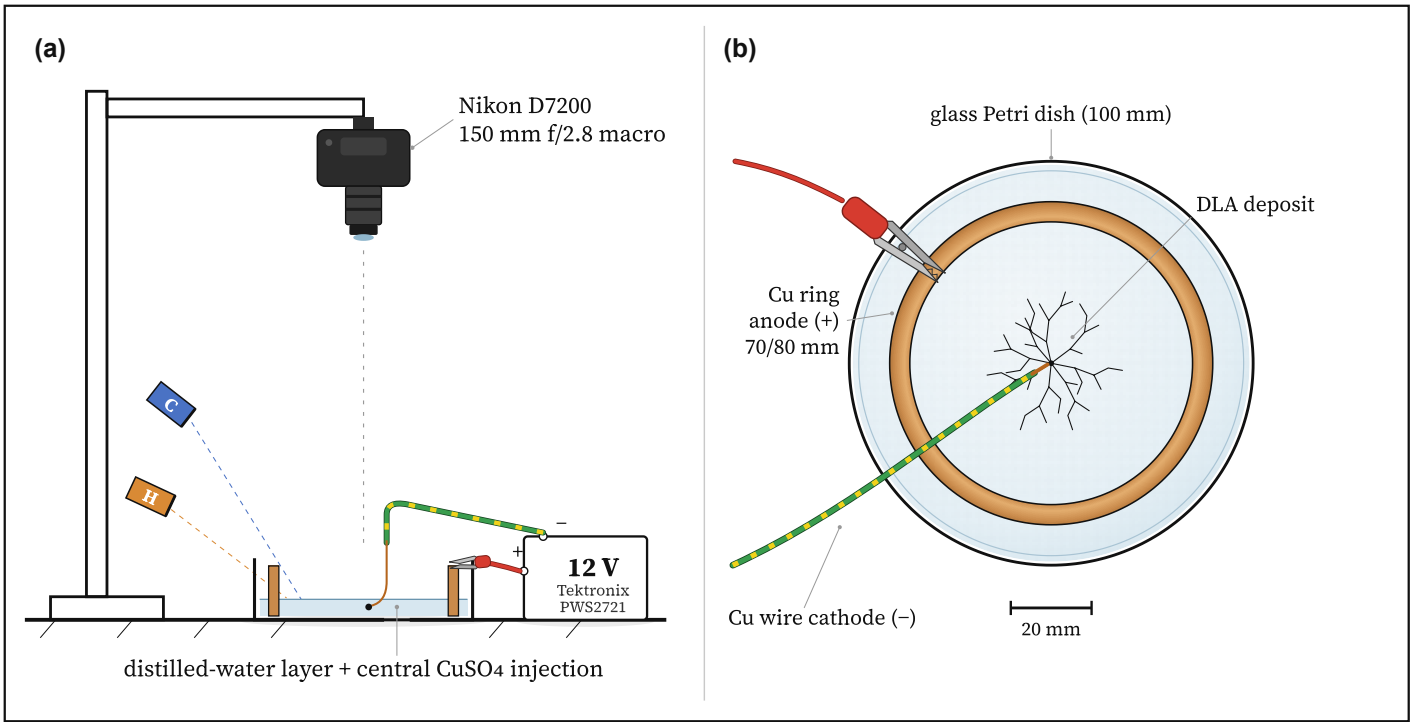


איור 1: המחשת הממד הפרקטלי ושיטת ספירת הקופסאות. למעלה: קו ישר ($D = 1$), צביר DLA ($1 < D < 2$) ודסקה מלאה ($D = 2$) על גבי סריג התיבות. מספר התיבות הדרוש לכיסוי עצם גדל כחזקת הממד שלו: קו ממלא $N \propto \varepsilon^{-1}$ תיבות, משטח מלא $N \propto \varepsilon^{-2}$, ופרקטל - חזקה לא שלמה שביניהן. למטה: $N(\varepsilon)$ בסקלה לוג־לוג עבור שלושת העצמים; הממד מחולץ כשיפוע הישר.

ריכוז התמיסה קובע את זמינות היונים המזינים את החזית, ודרכו את אופי הגדילה. בריכוז נמוך ההובלה דיפוזיבית בעיקרה והמיסוך שולט - התנאים הקרובים ביותר ל־DLA אידיאלי. עם עליית הריכוז נחלש המיסוך בין ענפים שכנים, ומנגנוני הובלה נוספים - נדידה (migration) בשדה החשמלי והסעה (convection) - מתחרים בדיפוזיה וממלאים את החלל שבין הענפים; מתקבל מבנה צפוף שממדו האפקטיבי שואף לממד המישור, $D \rightarrow 2$, ולצדו חזית גדילה מהירה. לכן המדידה בריכוז הנמוך ביותר היא המבחן ההוגן ביותר לערך התיאורטי 1.71.

בניסוי נמדדו, כתלות בריכוז התמיסה: רדיוס המעגל החוסם את הצביר $R(t)$, קצב הגדילה הממוצע $\left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle$, צפיפות הצביר $\phi = M/\pi R^2$ (כאשר M שטח המשקע), והממד הפרקטלי D.

2 מהלך הניסוי



איור 2: מבנה המערכת של הניסוי. מצד שמאל ניתן לראות מבט צידי של המערכת הכוללת, ומצד ימין מבט עילי על הצלחת עצמה, שהיא נקודת המבט של המצלמה. המערכת מכילה מצלמה המצלמת את צלחת הפטרי, בתוכה טבעת נחושת וחוט נחושת המשמשים כאנודה וקתודה בהתאמה, והם מחוברים לספק מתח. הצלחת מכילה גם תמיסת נחושת גופרתית, וכאשר מופעל המתח מתחיל להיווצר צביר סביב הקתודה.

מערכת הניסוי, המתוארת באיור 2, היתה מורכבת מצלחת פטרי מזכוכית (קוטר $100\ \mathrm{mm}$) אשר היתה מונחת אופקית ומצולמת מלמעלה. בתוך צלחת הפטרי הונחה טבעת נחושת (קוטר פנימי $70\ \mathrm{mm}$; קוטר חיצוני $80\ \mathrm{mm}$) אשר שימשה כאנודה $(+)$, והקצה החשוף של חוט נחושת דק הונח במרכזן ושימש כקתודה $(-)$. שכבת אלקטרוליט דקה נוצרה על ידי יציקה של מים מזוקקים, ולאחר מכן הוזרקה בפיפטה כמות קטנה של תמיסת ה־$CuSO_4$ סמוך למרכז הטבעת, וללא ערבוב.

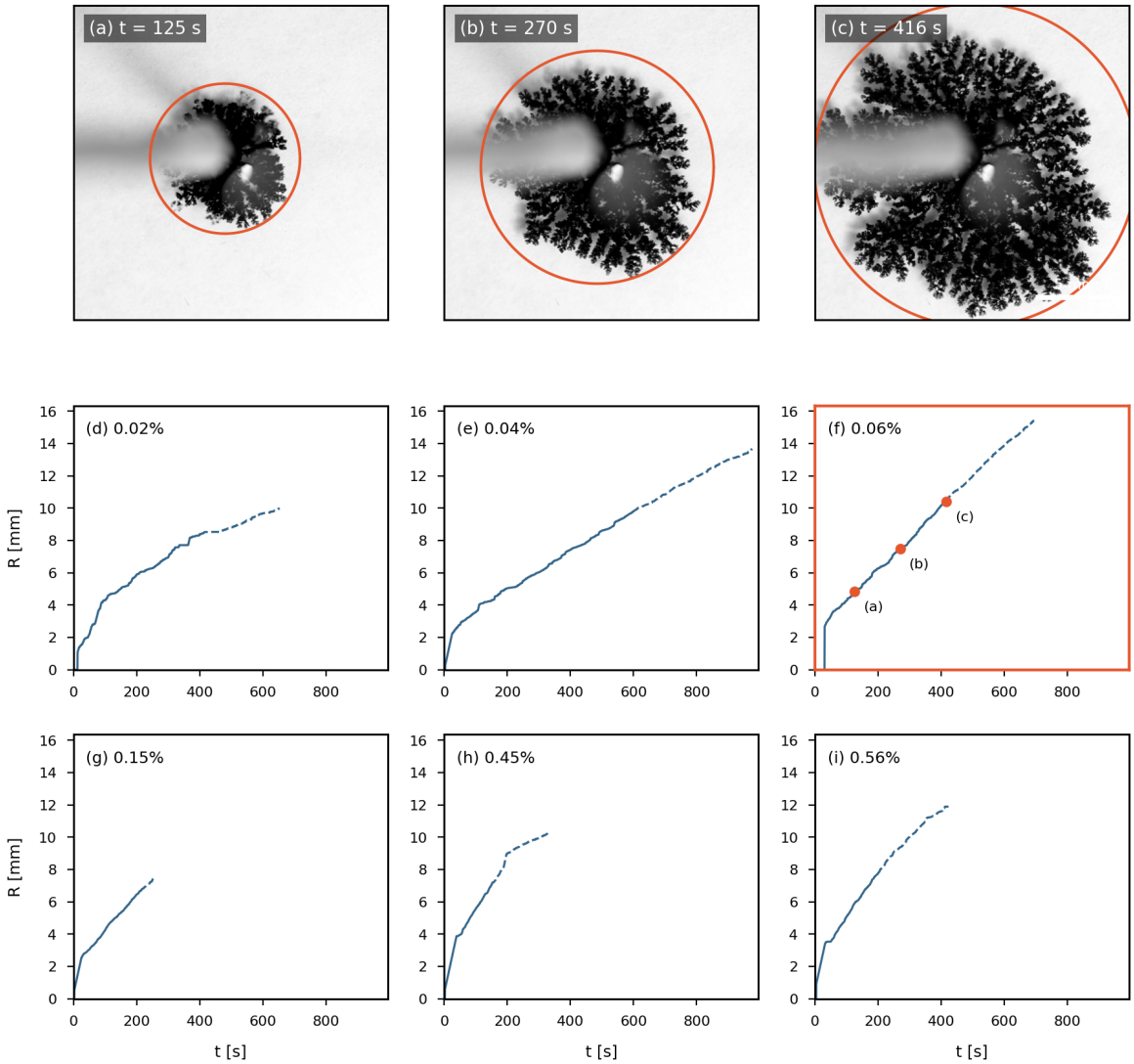
הצילום בוצע במצלמת Nikon D7200 המצוידת בעדשת מאקרו Sigma 150 mm f/2.8. המצלמה היתה מותקנת על זרוע וכוונה אנכית כלפי מטה לתמיסה במבט top-down (ראו איור 2). כבל UC-E17 חיבר בין המצלמה למחשב שהריץ את תוכנת digiCamControl ששימשה להסרטת המדידות. כל סרטון צולם ברזולוציה של 1280×720 פיקסלים ובקצב של 60fps, ולצורכי כיול מידות הונח נייר מילימטרי ברקע המערכת.

על מנת לשפר את איכות הצילום בתאורה נמוכה נעשה שימוש בשני גופי תאורה שונים: (1) מנורת UV "קרה" אשר הופעלה לאורך כל המדידות ו־ (2) מנורת להט "חמה" אשר הופעלה רק בחלק מהמדידות (בריכוזים $0.30\%, 0.45\%, 0.56\%$). בדיעבד התגלה כי מנורת הלהט ה"חמה" ־ אשר גרמה לחימום מקומי של מערכת הניסוי ־ השפיעה על הובלת יוני ה־ Cu^{2+} בתמיסה וייתכן שהטתה את אופי בניית הפרקטלים (ראו פרק הדיון). לאחר הצבת המערכת והתאורה, סופק מתח על ידי ספק כוח Tektronix PWS2721 במצב מתח קבוע. לאורך כל המדידות $(n = 7)$ קיבענו את המתח ל־$12V$. במדידות השונות ריכוז התמיסה היה בערכים $0.02\%, 0.04\%, 0.06\%, 0.15\%, 0.30\%, 0.45\%, 0.56\%$, כאשר האחוז הוא יחס מסת הנחושת הגופרתית למסת התמיסה הכוללת (מים ומלח). את מדידת ה־ 0.30% החרגנו בסופו של דבר מניתוח הנתונים עקב פוקוס לקוי, כך שנותרנו עם $n = 6$ מדידות בסך הכל. דוגמה לפריימים מהסרטונים ניתן לראות באיור 4.

עיבוד הסרטונים נעשה באמצעות python. מכל סרטון חולצו פריימים בקצב של 2fps. הכיול בין פיקסלים למילימטרים בוצע בנפרד עבור כל מדידה באמצעות הנייר המילימטרי שהונח ברקע (התקבלו כיול של $35.6\mathrm{px/mm}$ בסדרת מדידות אחת וכיול של $50\mathrm{px/mm}$ בסדרת השנייה). לאחר הפעלת המתח זוהה בכל פריים הצביר הגדל, ומתוכו נמדדו מספר גדלים: הרדיוס של המעגל החוסם את צביר נחושת כתלות בזמן $R(t)$, הנגזרת שלו כתלות בזמן $\frac{dR}{dt} \equiv \dot{R}(t)$ המתארת את מהירות חזית הגדילה של הצביר, והממד הפרקטלי D אשר חושב באמצעות שיטת ה־box-counting, והיחס $\phi = M/\pi R^2$ בין שטח המשקע לשטח המעגל החוסם. באיור 3 ניתן לראות דוגמה לחילוץ המעגל החוסם את הצביר לאורך גדילתו.

אי־הוודאות בממד הפרקטלי D נאמדה מהפיזור בין הפריימים, הספים והאומדנים השונים בהם עשינו שימוש במהלך עיבוד הסרטונים. ה־ errorbars של מהירות החזית משקפים את שגיאת ההתאמה בלבד ומהווים חסם תחתון לאי־הוודאות האמיתית.

3 תוצאות



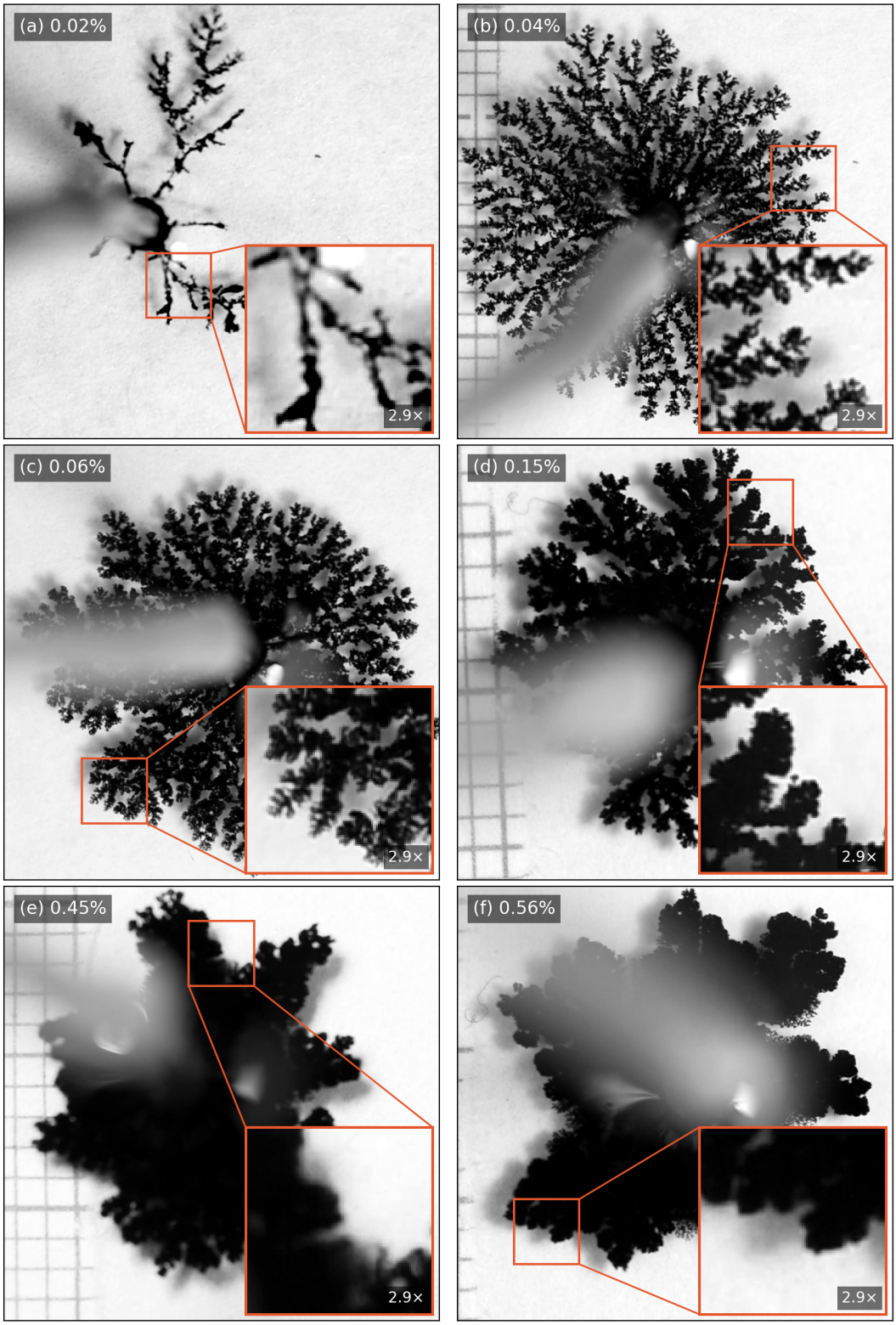
איור 3: מדידת רדיוס המעגל החוסם את הצביר. $(a)-(c)$ פריימים משלושה זמנים בריצת ה־0.06%, ועליהם המעגל החוסם באדום; הפריים ב־(c) הוא האחרון שבו הצביר אינו נוגע בשולי התמונה. $(d)-(i)$ רדיוס המעגל החוסם כתלות בזמן עבור ששת הריכוזים, על צירים משותפים כך שהשיפועים ניתנים להשוואה ישירה. קו מלא ־ עד למגע הראשון של הצביר בשולי הפריים; קו מקווקו ־ לאחריו, אז הרדיוס המדוד מהווה חסם תחתון בלבד. פאנל ה־0.06% (f) מוקף בכתום, ועליו מסומנים זמני הפריימים $(a)-(c)$.

בחלק זה יוצגו תוצאות המדידות, תוך התמקדות בבחינת תלות הפרמטרים השונים של הצביר בריכוז התמיסה.

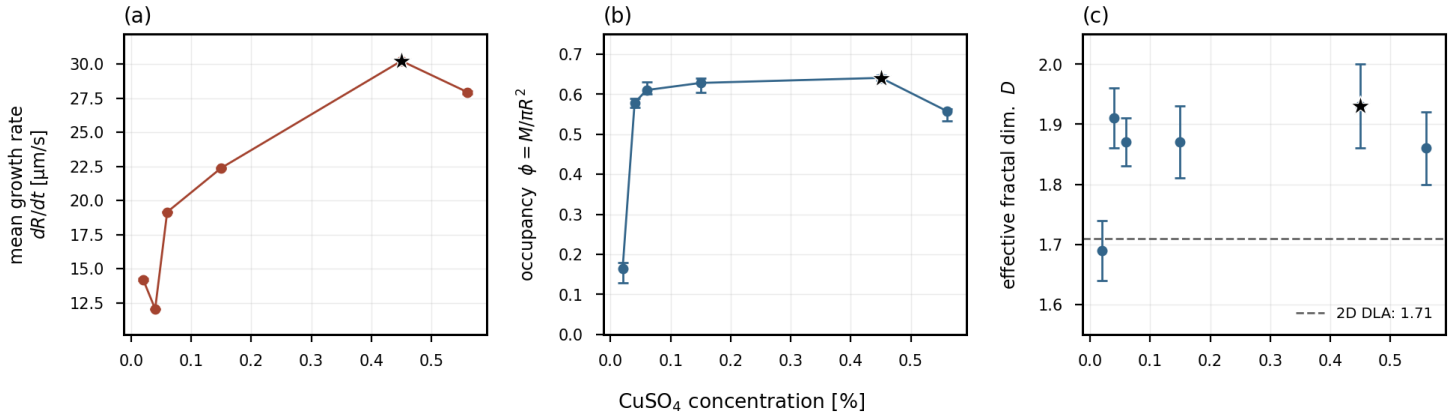
ראשית, חולץ הנתון הבסיסי של רדיוס המעגל החוסם את הצביר, $R(t)$, כתלות בזמן, כפי שמוצג באיור 3. מהתוצאות ניכר כי הרדיוסים גדלים לאורך הזמן, אך בקצבים משתנים. על מנת לכמת פערים אלו, נבחן קצב הגדילה הממוצע, $\left\langle \frac{dR}{dt} \right\rangle$, כתלות בריכוז התמיסה (איור 5). מהגרף עולה כי קצב הגדילה אכן תלוי בריכוז התמיסה, ועולה עם הריכוז.

צפיפות הצביר ϕ (איור 5) מבחינה בין הריכוז הנמוך ביותר, שבו הצביר דליל ($\phi \approx 0.16$), ובין כל הריכוזים הגבוהים יותר, שבהם הצפיפות מגיעה לרוויה סביב $\phi \approx 0.6$ כמעט ללא תלות נוספת בריכוז. כלומר, המעבר ממבנה פתוח ומסועף למבנה צפוף מתרחש כבר בין 0.02% ל־0.04%, כפי שנראה גם בהשוואת הפריימים באיור 4.

לבסוף נמדד הממד הפרקטלי D בשיטת ספירת הקופסאות (איור 5). בריכוז הנמוך ביותר התקבל $D = 1.69 \pm 0.05$, בהתאמה לערך התיאורטי $D \approx 1.71$ של DLA דו־ממדי. בכל הריכוזים הגבוהים יותר הממד עולה ומתייצב בתחום $D = 1.86 - 1.93$, קרוב לממד המישור אך אינו מגיע אליו ־ בעקביות עם הרוויה שנצפתה בצפיפות: הצביר עובר ממבנה פרקטלי דליל למבנה צפוף וקומפקטי, שממדו האפקטיבי שואף לממד המישור.



איור 4: **מעבר מורפולוגי מצבירי DLA פרקטליים לגדילה צפופה וקומפקטית.** $(a)-(f)$, פריימים מייצגים של צבירי הנחושת לקראת סיום הגדילה, בריכוזי $CuSO_4$ (אחוז מסה) של (a) 0.02%, (b) 0.04%, (c) 0.06%, (d) 0.15%, (e) 0.45% ו־(f) 0.56%; גווני האפור מנורמלים פר־פאנל, והפאנלים אינם בקנה מידה משותף. בריכוזים הנמוכים (a-c) ההובלה דיפוזיבית בעיקרה והמיסוך שולט, ומתקבלים מבנים מסועפים ודקים האופייניים ל־DLA. עם עליית הריכוז מצטרפים מנגנוני הובלה נוספים ־ נדידה בשדה החשמלי והסעה ־ הממלאים את החלל שבין הענפים, והמבנה נעשה צפוף (d) ולבסוף קומפקטי וכהה (e, f). האזור הבהיר במרכז כל פאנל הוא חוט הקתודה והשתקפות התאורה, והרשת ברקע היא נייר המילימטרי ששימש לכיול. המסגרות הכתומות מסמנות אזורים המוצגים בהגדלה של $2.9\times$ בפינה הימנית־התחתונה של כל פאנל: ההגדלות חושפות את מורפולוגיית הקצוות ־ ענפים דקים בתחום ה־DLA הולכים ומתעבים בהדרגה עם הריכוז, ומתקבלים קצוות רחבים וקהים בעלי קנה אורך אופייני גדול יותר.



איור 5: מדדי הצביר כתלות בריכוז התמיסה. (a) קצב הגדילה הממוצע של חזית הצביר; המגמה עולה מ־$12\,\mu\mathrm{m/s} \approx$ ל־$30\,\mu\mathrm{m/s} \approx$, והנקודה הראשונה (0.02%) חורגת מהמגמה (ראו דיון). (b) צפיפות הצביר $\phi = M/\pi R^2$: בריכוז הנמוך ביותר הצביר דליל ($\phi \approx 0.16$), ומעליו הצפיפות מגיעה לרוויה סביב $\phi \approx 0.6$. (c) הממד הפרקטלי האפקטיבי: בריכוז הנמוך ביותר $D = 1.69 \pm 0.05$, בהתאמה לערך התיאורטי $D \approx 1.71$ (קו מקווקו); בריכוזים הגבוהים יותר הממד עולה ומתייצב סביב 1.9. כוכבית מציינת מדידות שבוצעו תחת מנורת הלהט המחממת.

4 דיון

בניסוי נבחנה השפעת ריכוז תמיסת ה־$CuSO_4$ על מאפייני צביר הנחושת הנוצר באלקטרודפוזיציה תחת מתח קבוע. נמצא כי קצב הגדילה הממוצע עולה עם הריכוז, וצפיפות הצביר מגיעה לרוויה כבר מעל הריכוז הנמוך ביותר (איורים 5 ו־5). ריכוז גבוה מגדיל את זמינות היונים בחזית הגדילה ומחליש את המיסוך בין ענפים שכנים: יונים מספיקים לחדור אל המפרצים בטרם ייבלעו בקצוות הבולטים, והצביר גדל מהר יותר ונעשה דחוס יותר, בהתאם לתמונה שהוצגה במבוא.

הממד הפרקטלי (איור 5) משלים תמונה זו. בריכוז הנמוך ביותר התקבל $D = 1.69 \pm 0.05$, בהתאמה לערך התיאורטי $D \approx 1.71$ של DLA דו־ממדי ־ כצפוי, שכן ריכוז נמוך הוא הקרוב ביותר לתנאי המודל, שבהם ההובלה דיפוזיבית בלבד. בריכוזים הגבוהים יותר הממד עולה ומתייצב סביב 1.9: המיסוך נחלש, ומנגנוני הובלה נוספים ־ נדידה בשדה החשמלי והסעה ־ ממלאים את החלל שבין הענפים, כך שהמבנה מתקרב לממלא־מישור ($D \to 2$). מכאן שהריכוז אינו קובע רק את קצב הגדילה, אלא גם את אופי הגדילה עצמו.

לצד זאת יש למנות כמה מגבלות. ראשית, רעידות של משטח העבודה וחוסר יציבות מכנית של זרוע המצלמה פגעו בפוקוס, והרזולוציה הייתה גבולית ביחס לרוחב הענפים הדקים. שיטת ספירת הקופסאות רגישה לעובי הענף הנראה בתמונה, ולכן פגמים אלו מטים את הממד המדוד כלפי מעלה; מדידת ה־0.30% אף הוחרגה מהניתוח עקב פוקוס לקוי. שנית, מנורת הלהט שהופעלה בריכוזים הגבוהים $(0.30\% - 0.56\%)$ חיממה את התמיסה מקומית, באופן שעשוי לעורר הסעה תרמית ולהאיץ את הובלת היונים. אפקט זה פועל באותו הכיוון של העלייה בריכוז, ולכן לא ניתן להפריד בין תרומתו לתרומת הריכוז במדידות אלו. ייתכן כי גם הירידה הקלה בקצב הגדילה שנמדדה בריכוז 0.56% קשורה לחימום זה. שלישית, בדגימת הריכוז הנמוך ביותר הקתודה הונחה בצורה עקומה והצביר גדל בצורה לא־סימטרית; הדבר ניכר בצפיפות הנמוכה במיוחד (איור 5) ובחריגת הנקודה הראשונה מהמגמה בקצב הגדילה (איור 5).

בהמשך המחקר ניתן לחזק את המסקנות בכמה דרכים: הצבת המערכת על משטח מבודד־רעידות ושימוש במצלמה ברזולוציה גבוהה יותר, כדי לצמצם את ההטיה בממד; דגימה צפופה יותר של ריכוזים בתחום הנמוך, שבו מתרחש המעבר מגדילה מוגבלת־דיפוזיה לגדילה קומפקטית; שימוש בתאורה אחידה שאינה מחממת את המערכת; ובחינת התלות במתח ההפעלה, הקובע את חלקה של הנדידה בהובלת היונים.